

## MODELOVANJE EFEKTA TUNELOVANJA U TALASOVODNIM STRUKTURAMA KORIŠĆENJEM EKVIVALENTNOG KOLA

Nebojša Vojnović, Miranda Mitrović, Institut za fiziku, Univerzitet u Beogradu, [nebojsav@ipb.ac.rs](mailto:nebojsav@ipb.ac.rs)

**Sadržaj** – U ovom radu predstavljen je jednostavan metod za efikasno modelovanje efekta tunelovanja u talasovodu pomoću ekvivalentne šeme. Izveden je uslov za pojavu rezonansi i komentarisane su osobine pravougaonih talasovoda ispod kritične učestanosti dominantnog moda za slučaj dvoslojnog dielektrika u uvodnom talasovodu. Upoređeni su rezultati dobijeni pomoću ekvivalentne šeme sa rezultatima full-wave simulacije i dobijeno je dobro slaganje.

### 1. UVOD

Pored rastućih mogućnosti današnjih računara, a samim tim i njihove sposobnosti da rešavaju sve veće i kompleksnije probleme u domenu elektromagnetike, značaj predstavljanja problema ekvivalentnim šemama ne gubi na svojoj važnosti. Svrha korišćenja ovakve metode leži u značajnoj uštedi memorijskih i vremenskih resursa, u poređenju sa korišćenjem full-wave 3D elektromagnetskih solvera, uz zadovoljavajuću preciznost. Tačnost dobijenih rezultata u velikoj meri zavisi od vernosti sa kojom korišćeni algoritmi za aproksimaciju predstavljaju stvarnu fiziku problema. U literaturi [1], [2] se mogu pronaći ekvivalentna kola koja na veoma dobar način modeluju kompleksne probleme, čak i na visokim učestanostima.

Talasovodne strukture, iako komplikovane za integraciju i skupe za proizvodnju, i dalje predstavljaju jedan od najrobusnijih i najboljih sistema za prenos, imajući u vidu prenos velikih snaga, kao i male gubitke. Utvrđeno je [3] da pravougaoni talasovodi koji su jako suženi po visini (u E-ravni) tako da se pretvaraju u veoma uzak kanal mogu pod određenim uslovima da ispolje efekat tunelovanja energije. Upravo taj efekat stavlja ove prenosne sisteme u potpuno nov kontekst, omogućavajući im niz dosad nerazmatranih primena. Cilj ovog rada je da pokaže na koji način je moguće modelovati efekat tunelovanja energije kroz suženi pravougaoni talasovod, korišćenjem prostih relacija jednostavnih za implementaciju.

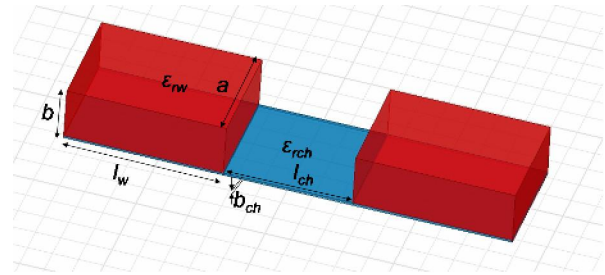
### 2. TEORIJSKA ANALIZA RAZMATRANE STRUKTURE

Izgled strukture koja će biti razmatrana u ovom radu dat je na Sl. 1. U pitanju je pravougaoni talasovod sa suženjem koje formira ENZ kanal. Jedan od potrebnih uslova za pojavu tunelovanja jeste i taj da kanal mora biti simetričan. Pokazano je u [4] da se kod strukture sa nesimetričnim kanalom ne javlja efekat tunelovanja.

Na Sl. 1 su različitim bojama označeni dielektrici u uvodniku i kanalu, s tim što cela struktura ima metalnu prevlaku, osim sa krajnje leve i krajnje desne strane gde se nalaze talasovodni pristupi. Korišćene su sledeće dimenzije:

- $a$  - širina talasovoda
- $b$  - visina talasovoda
- $l_w$  - dužina uvodnika

- $b_{ch}$  - visina kanala
- $l_{ch}$  - dužina kanala
- $\epsilon_{rw}$  - relativna permitivnost gornjeg dielektrika
- $\epsilon_{rch}$  - relativna permitivnost donjeg dielektrika.



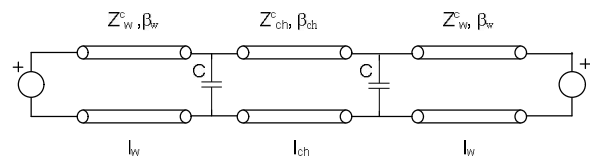
Slika 1 - Izgled razmatrane strukture

Kao što se sa Sl. 1 vidi u uvodnom talasovodu se nalaze dva dielektrika što dodatno komplikuje aproksimaciju ovog dela strukture ekvivalentnom šemom. U literaturi [5] se može naći uslov koji relativne permitivnosti treba da zadovolje da bi došlo do tunelovanja. Taj uslov glasi:

$$\frac{\epsilon_{rw}}{4} \leq \epsilon_{rch} \leq \epsilon_{rw}. \quad (1)$$

Međutim, čak i ako ovaj uslov nije ispunjen, u strukturi može doći do pojave tunelovanja ukoliko se širina kanala dovoljno smanji.

Na Sl. 2 je data ekvivalentna šema koja je korišćena u ovom radu.



Slika 2 - Ekvivalentna šema strukture sa Sl. 1

Naglašavamo da u literaturi [6] postoji još jedan način modelovanja promene visine talasovoda korišćenjem kondenzatora ali i idealnih transformatora. Pokazano je da je ekvivalentna šema sa Sl. 2 konceptiono logičnije rešenje istog problema koje daje rezultate iste tačnosti.

Sa Sl. 2 se vidi da su uvodnici i kanal modelovani sekcijama voda sa parametrima  $Z_w, \beta_w$  i  $l_w$  odnosno  $Z_{ch}, \beta_{ch}$  i  $l_{ch}$ . Treba napomenuti da su  $Z_w$  i  $Z_{ch}$  karakteristične impedanse ekvivalentnih vodova, a ne talasne impedanse TE talasa u talasovodima. Kao što je i ranije napomenuto u uvodniku se nalaze dva dielektrika postavljena normalno na vektor električnog polja. Zbog toga je umesto klasične formulacije faznog koeficijenta za talas TE tipa, iz literature [7] preuzet izraz koji definiše vodenu talasnu dužinu u ovakvoj strukturi, dat sa:

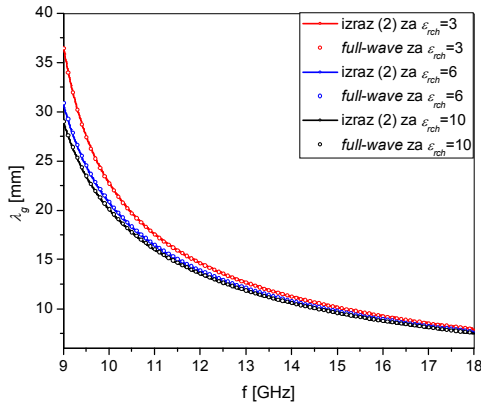
$$\lambda_{gw} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\frac{\epsilon_{rch}}{1 - \frac{b-b_{ch}}{b} \left(1 - \frac{\epsilon_{rch}}{\epsilon_{rw}}\right)} - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}, \quad (2)$$

pri čemu je sa  $\lambda_0$  obeležena talasna dužina u slobodnom prostoru. Fazni koeficijent i talasna impedansa u uvodnicima,  $\beta_w$  i  $Z_w^w$ , dati su izrazima:

$$\beta_w = \frac{2\pi}{\lambda_{gw}} \quad (3)$$

$$Z_w^w = \frac{\omega\mu_0}{\beta_w}. \quad (4)$$

Korišćenje klasične relacije za računanje faznog koeficijenta u uvodniku za TE talase zahtevalo bi neku vrstu homogenizacije dielektrika, što je izbegnuto implementacijom jednačine (2). Na Sl. 3 je upoređena vođena talasna dužina računata relacijom (2), sa istim parametrom dobijenim *full-wave* 3D simulacijom, za nekoliko vrednosti relativne permitivnosti u kanalu, i vidi se da u posmatranom opsegu nema razlike, čak i za različite dielektrične konstante.



Slika 3 - Poređenje vrednosti parametra  $\lambda_{gw}$  koji je dobijen na osnovu relacije (2) i 3D *full-wave* simulacijom za različite dielektrike ( $a=7.62\text{mm}$ ,  $b=4.06\text{mm}$ ,  $b_{ch}=0.508\text{mm}$ ,  $\epsilon_{rw}=5.95$ )

Za razliku od uvodnika, u kanalu se nalazi samo jedan dielektrik, pa je stoga moguće iskoristiti klasičnu formulaciju TE talasa. Parametri kanala tj. fazni koeficijent  $\beta_{ch}$ , i talasna impedansa  $TE_{10}$  talasa,  $Z_{ch}^w$ , dati su izrazima:

$$\beta_{ch} = \sqrt{\omega^2\mu_0\epsilon_0\epsilon_{rch} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad (5)$$

$$Z_{ch}^w = \frac{\omega\mu_0}{\beta_{ch}}. \quad (6)$$

Potrebno je na neki način od talasne impedanse  $TE_{10}$  talasa u sekcijama talasovoda dobiti karakteristične impedanse kojima će biti opisivane sekcije vodova u ekvivalentnoj šemi. Talasna impedansa definiše se kao odnos intenziteta vektora električnog i magnetskog polja, dok je karakteristična impedansa ekvivalentnog voda data kao odnos napona i struje u posmatranoj tački voda. Imajući u vidu da su napon i struja definisani kao linijski integrali vektora električnog, odnosno magnetskog polja, jasno je da je moguće

aproksimirati karakteristične impedanse vodova izrazima oblika:

$$Z_w^c = \frac{2b}{a} Z_w^w \quad (7)$$

$$Z_{ch}^c = \frac{2b_{ch}}{a} Z_{ch}^w. \quad (8)$$

Faktor 2 je u relacijama (7) i (8) stavljen da bi kompenzovao sinusnu raspodelu električnog polja po širini pravougaonog talasovoda.

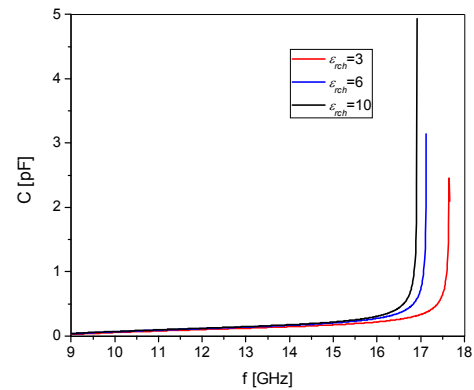
Posebna pažnja se mora posvetiti modelovanju talasovoda sa  $TE_{10}$  talasom ukoliko se radna učestanost nalazi ispod kritične učestanosti dominantnog moda. Za slučaj kada je radna učestanost veća od kritične učestanosti  $TE_{10}$  moda, postoji prostiranje talasa u talasovodu i izraz pod korenom u (5) je pozitivan. Treba napomenuti da je korenovanje u izrazu (5) realna operacija.

Međutim, kada je radna učestanost manja od kritične učestanosti  $TE_{10}$  moda, u talasovodu postoje evanescentni talasi koji imaju veoma izraženo slabljenje i tada umesto izraza (5) treba koristiti izraz oblika:

$$\gamma_{ch} = j\sqrt{\omega^2\mu_0\epsilon_0\epsilon_{rch} - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}, \quad (9)$$

gde je sa  $\gamma_{ch}$  obeležen kompleksni koeficijent prostiranja talasa u kanalu. U izrazu (9) korenovanje je kompleksna operacija i može dati rešenje sa pozitivnim ili negativnim predznakom. Ovaj predznak treba odabrati tako da realni deo kompleksnog koeficijenta prostiranja u kanalu,  $Re\{\gamma_{ch}\}$ , bude veći od nule, što odgovara prirodi evanescentnih talasa. Prilikom modelovanja sekcija talasovoda ekvivalentnim vodovima korišćeni su modeli vodova bez gubitaka.

Promene u visini talasovoda su u ekvivalentnom modelu predstavljene paralelnim kondenzatorima. Ovo je urađeno da bi se adekvatno modelovalo naelektrisanje koje se nagomilava na vertikalnim zidovima na mestima gde talasovod menja visinu. Izrazi kojima se definiše kapacitivnost ovih kondenzatora su uzeti iz [7] za slučaj nesimetrične sprege dva talasovoda. Na osnovu tih izraza dobijena je frekvencijska zavisnost kapacitivnosti paralelnog kondenzatora za više tipova dielektrika u kanalu, prikazana na Sl. 4.



Slika 4 - Frekvencijska zavisnost kapacitivnosti paralelnog kondenzatora za slučaj  $a=7.62\text{mm}$ ,  $b=4.06\text{mm}$ ,  $b_{ch}=0.254\text{mm}$ ,  $\epsilon_{rw}=5.95$ , računata na osnovu izraza datih u [7]

Sa Sl. 4 se vidi da ova kapacitivnost ima singularitet koji se javlja kada je  $b=\lambda_{gw}/2$ . Da bi greška izraza koji definišu kapacitivnost kondenzatora bila manja od 1%, potrebno je da važi  $2b/\lambda_{gw} \leq 1$ . Vredi napomenuti da je kapacitivnost ilustrovana na Sl. 4 singularna u smislu da će na frekvenciji  $f_c$  ona imati beskonačno veliku vrednost i samim tim će u kolu sa Sl. 2 na toj frekvenciji umesto paralelnog kondenzatora stajati kratak spoj.

Sve sekcije sa Sl. 2 su modelovane korišćenjem ABCD matrica, čiji su parametri za svaki od elemenata u kolu preuzeti iz [8]. Uslov koji je neophodno ispuniti da bi ovakva reprezentacija bila opravdana jeste taj da sprega među susednim sekcijama bude zanemarljiva, što ovde i jeste slučaj. Nakon kaskadnog vezivanja odgovarajućih ABCD matrica i njihovog množenja, dobijeni ABCD parametri su transformisani u parametre rasejanja ( $S$ -parametre) uz pomoć relacija datih u [8].

### 3. REZULTATI

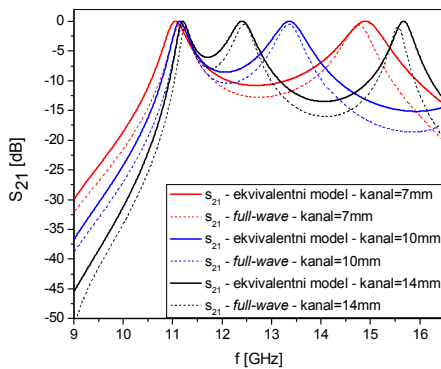
U ovom delu rada biće uporedno prikazani rezultati dobijeni korišćenjem ekvivalentnog modela i rezultati dobijeni *full-wave* 3D simulacijom.

Za prikaz rezultata odabran je uvodni talasovod čija je širina  $a=7.62\text{mm}$ , visina  $b=4.06\text{mm}$  i dužina  $l_w=7\text{mm}$ , dok kanal ima visinu  $b_{ch}=0.254\text{mm}$  i dužinu  $l_{ch}=7\text{mm}$ . Relativne permitivnosti u uvodniku i kanalu su  $\epsilon_{rw}=5.95$  i  $\epsilon_{rch}=3$ , respektivno.

Na Sl. 5 je prikazan koeficijent transmisije,  $S_{21}$ , u razmatranoj strukturi za tri vrednosti dužine kanala. Sa slike se vidi da se u opsegu od interesa javljaju dve rezonanse. Ove dve rezonanse ćemo označiti sa *zero-order resonance* (ZOR), odnosno sa *Fabry-Perot resonance* (FP). Takođe se vidi da se promenom dužine kanala u mnogo većoj meri može uticati na poziciju FP rezonanse, dok se pozicija ZOR-a veoma malo menja. Drugim rečima, ZOR praktično ne zavisi od dužine kanala, dok FP rezonansa zavisi.

Za slučaj kanala dužine 7mm, ekvivalentni model pravi grešku u proceni pozicije dve rezonanse od 0.7% i 0.9%, respektivno. Što se tiče slučaja kada je kanal dužine 10mm, greške iznose 0.5% i 0.1%, respektivno. Ukoliko je kanal dugačak 14mm, greške u proceni ZOR-a i FP-a su 0.4% i 0.8%, respektivno.

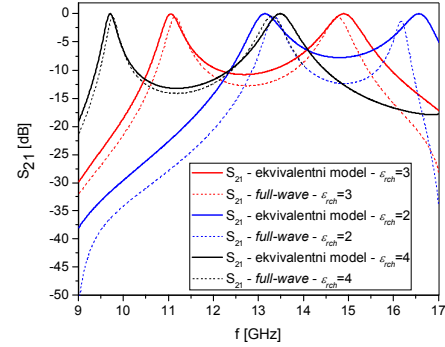
Dakle, može se zaključiti da se rezultati dobijeni ekvivalentnim modelom odlično slažu sa rezultatima dobijenim *full-wave* simulacijom, obzirom da je razlika između dva načina računanja manja od 1%.



Slika 5 - Koeficijent transmisije,  $S_{21}$ , za ekvivalentni i *full-wave* model i to za tri različite dužine kanala:  $l_{ch}=7, 10, 14\text{mm}$

Na Sl. 6 je prikazan koeficijent transmisije u razmatranoj strukturi za tri vrednosti relativne permitivnosti u kanalu. Za slučaj da se u kanalu nalazi dielektrik relativne permitivnosti  $\epsilon_{rch}=2$ , greške u pozicijama ZOR i FP rezonansi iznose 1.5% i 2.5%, respektivno. Ukoliko se za relativnu permitivnost u kanalu odabere  $\epsilon_{rch}=4$ , greške su 0.4% i 1.4%. Na istoj slici je prikazan i slučaj kada je u kanalu relativna permitivnost  $\epsilon_{rch}=3$ , kao referenca.

Može se zaključiti da ekvivalentni model pravi manju grešku ukoliko se relativna permitivnost u kanalu povećava, nego u slučaju da se smanjuje. U oba slučaja greška ne prelazi vrednost od 2.5%, pa se može reći da je slaganje rezultata dobijenih ekvivalentnim kolom i 3D simulacijom vrlo dobro. Treba napomenuti da prilikom promene relativne permitivnosti u kanalu uslov (1) mora biti zadovoljen.



Slika 6 - Koeficijent transmisije,  $S_{21}$ , za ekvivalentni i *full-wave* model i to za tri različita dielektrika u kanalu

### 4. IZVOĐENJE USLOVA REZONANSI

U daljem tekstu ćemo se pozabaviti uslovom koji treba da bude zadovoljen da bi došlo do rezonanse u ovakvoj strukturi. U literaturi [4] je izveden uslov javljanja tunelovanja, na frekvenciji ZOR, koji glasi:

$$f_{nn} = \frac{c}{2a\sqrt{\epsilon_{rch}}}, \quad (11)$$

što znači da se efekat tunelovanja javlja tačno na kritičnoj učestanosti dominantnog moda u kanalu.

Pokazuje se da na frekvencijama gde nastupaju i ZOR i FP, dva kondenzatora na krajevima kanala čine rezonantno kolo. Drugim rečima, kada se korišćenjem Smitovog dijagrama pronađe ulazna impedansa kanala koji je zatvoren kondenzatorom sa jedne strane, vidi se da je ta ulazna impedansa induktivnog karaktera. Paralelna veza ulazne impedanse i kondenzatora čini rezonantno kolo čiji je uslov rezonanse ispunjen upravo na frekvencijama gde nastupaju ZOR i FP.

Podimo od dobro poznate jednakosti koja opisuje ulaznu impedansu voda karakteristične impedanse  $Z_0$  koji je zatvoren impedansom  $Z_l$ . Tada imamo:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_l + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_l \tan(\beta l)}. \quad (12)$$

Ako pri tom uzmemo da važi:

$$Z_0 = Z_{ch}^c \quad (13)$$

$$Z_l = \frac{1}{j\omega C}, \quad (14)$$

za ulaznu impedansu kanala dobijamo:

$$Z_{in} = j \frac{Z_{ch}^c \left( Z_{ch}^c \tan(\beta_{ch} l_{ch}) - \frac{1}{\omega C} \right)}{Z_{ch}^c + \frac{1}{\omega C} \tan(\beta_{ch} l_{ch})} = j\omega L_e, \quad (15)$$

gde je sa  $L_e$  obeležena ekvivalentna induktivnost. Rešavanjem uslova rezonanse:

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L_e, \quad (16)$$

dobijamo transcendentni uslov koji je zadovoljen na frekvencijama gde se javljaju ZOR i FP. Taj uslov je dat sa:

$$\tan(\beta_{ch} l_{ch}) = \frac{2Z_{ch}^c}{Z_{ch}^c{}^2 \omega C - \frac{1}{\omega C}}. \quad (17)$$

Ova jednačina ima beskonačno mnogo rešenja, kao što je prikazano i u [9], i zbog njene transcendentne prirode komplikovano je rešiti je numerički, ali je zato mnogo jednostavnije rešiti je grafičkim putem.

U Tabeli 1 je dat pregled učestanosti rezonansi računatih preko relacije (17) i dobijenih *full-wave* simulacijom, za slučajeve razmatrane na Sl. 5 i Sl. 6.

Tabela 1 - Poređenje učestanosti rezonansi dobijenih računom i *full-wave* simulacijom

	ZOR [GHz] (računato)	ZOR [GHz] (full- wave)	$ \delta_{ZOR} $ [%]	FP [GHz] (računato)	FP [GHz] (full- wave)	$ \delta_{FP} $ [%]
Ref. ( $l_{ch}=7\text{mm}$ , $\epsilon_{rch}=3$ )	11.35	11.13	2	14.91	14.76	1
$l_{ch}=10\text{mm}$ ( $\epsilon_{rch}=3$ )	11.35	11.20	1.3	13.37	13.34	0.2
$l_{ch}=14\text{mm}$ ( $\epsilon_{rch}=3$ )	11.35	11.25	0.9	12.42	12.45	0.2
$\epsilon_{rch}=2$ ( $l_{ch}=7\text{mm}$ )	13.91	13.34	4.3	16.60	16.16	2.7
$\epsilon_{rch}=4$ ( $l_{ch}=7\text{mm}$ )	9.83	9.74	0.9	13.49	13.30	1.4

Na Sl. 6 smo mogli da vidimo da se rezultati ekvivalentnog modela i rezultati dobijeni *full-wave* simulacijom najviše razlikuju ukoliko je veća razlika u relativnim permitivnostima dva dielektrika u uvodniku. Na osnovu podataka iz Tabele 1 može se doneti isti zaključak. Iz Tabele 1 se takođe može videti da je relacija (17) u svim razmatranim slučajevima tačnija na frekvenciji FP rezonanse u odnosu na ZOR.

## 5. ZAKLJUČAK

Predstavljen je jednostavan metod za modelovanje talasovodnih struktura sa efektom tunelovanja, korišćenjem ekvivalentne šeme. Objasnjeno je na koji način je potrebno modelovati same vodove, kao i promene u visini pravougaonog talasovoda. Dati su komentari o ponašanju talasovoda ispod kritične učestanosti dominantnog moda. Izveden je uslov potreban za pojavu rezonansi u ovim strukturama koji sa greškom manjom od 4.3% predviđa

frekvenciju rezonanse. Upoređeni su rezultati dobijeni uz pomoć ekvivalentne šeme i rezultati dobijeni 3D simulacijom, i uočeno je da se oni ne razlikuju za više od 2.5%, što predstavlja dobro slaganje. Dalji rad u ovoj oblasti trebalo bi da bude usmeren ka ispitivanju efekata koji se javljaju sužavanjem kanala, napajanja strukture koaksijalnim vodom i dodavanjem proreza u kanal.

## ZAHVALNICA

Ovaj rad je finansiran od strane Ministarstva nauke Republike Srbije, kroz projekat pod oznakom TR32024. Autori se zahvaljuju dr. Branki Jokanović iz Instituta za fiziku u Beogradu na pomoći i korisnim savetima tokom izrade ovog rada.

## LITERATURA

- [1] F. Medina, F. Mesa, D. C. Skigin, "Extraordinary transmission through arrays of slits: A circuit theory model", *IEEE Transactions on MTT*, vol. 58, pp. 105-115, 2010.
- [2] R. Yang, R. Rodriguez-Berral, F. Medina, Y. Hao, "Analytical model for the transmission of electromagnetic waves through arrays of slits in perfect conductors and lossy metal screens", *Journal of Applied Physics*, vol. 109, 103107, 2011.
- [3] A. Alu, M. G. Silveirinha, A. Salandrino, N. Engheta, "Epsilon-near-zero metamaterials and electromagnetic sources: Tailoring the radiation pattern", *Physical Review B*, vol. 75, 155410, 2007.
- [4] M. Mitrović, B. Jokanović, "Field tunneling and losses in narrow waveguide channel", *Microwave Review* 16-2, pp. 8-13, 2010.
- [5] B. Edwards, A. Alu, M. E. Young, M. G. Silveirinha, N. Engheta, "Experimental verification of epsilon-near-zero metamaterial coupling and energy squeezing using a microwave waveguide", *Physical Review Letters*, vol. 100, 033903, 2008.
- [6] M. Mongiardo, T. Rozzi, "Efficient CAD of E-plane steps in rectangular waveguide", *Microwave Symposium Digest*, vol. 3, pp. 1175-1178, 1990.
- [7] N. Marcuvitz, *Waveguide Handbook*, New York: McGraw-Hill, 1951.
- [8] D. M. Pozar, *Microwave Engineering*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [9] D. Powell, A. Alu, B. Edwards, A. Vakil, Y. Kivshar, N. Engheta, "Nonlinear control of tunnelling through an epsilon-near-zero channel", *Physical Review Letters*, vol. 79, 245135, 2009.

**Abstract** – In this paper we present a simple method for efficient modelling of the tunneling effect in waveguide structures using the equivalent circuit model. A condition which occurs at resonances has been derived, and properties of rectangular waveguides with two different dielectrics operating below cutoff have been discussed. The results of the equivalent model have been compared to those obtained using the full-wave simulation and good agreement has been observed.

## WAVEGUIDE STRUCTURES TUNNELING EFFECT MODELLING USING THE EQUIVALENT CIRCUIT APPROACH

Nebojša Vojnović, Miranda Mitrović